Universidad Simón Bolívar
Departamentos de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA1112)
Ene-Mar 2024
1er Examen Parcial (30 %)

Duración: 1 hora 50 minutos

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

Pregunta 1. (6 ptos.) Calcular la integral $\int_0^3 (4x - x^2)\,\mathrm{d}x$ usando sumas de Riemann

Pregunta 2. (3 ptos.) Hallar el valor promedio de la función $f(x) = 1 + x^2$, en el intervalo $[-1, 2]$. Haga un dibujo que represente el resultado obtenido.

Pregunta 3. (6 ptos.) Hallar $f(2)$ siendo f una función continua que satisface para todo $x \geq 0$ la fórmula

$$\int_0^{x^2(1+x)} f(t)\,\mathrm{d}t = x$$

Pregunta 4. (3 ptos. c/u) Calcular las siguientes integrales:

$$\text{a)} \int 3x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{b)} \int_{-2}^{\sqrt{2}} \frac{x[\![x]\!]}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{c)} \int_0^1 \frac{x^2}{x^6+4}\,\mathrm{d}x$$

Pregunta 5. (2 ptos. c/u) Diga cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. Sean f y g funciones continuas en $[-80, 80]$. Si f es par y g es impar, entonces

$$\int_{-80}^{80} (af(x) + bg(x))\,\mathrm{d}x = 2a\int_0^{80} f(x)\,\mathrm{d}x$$

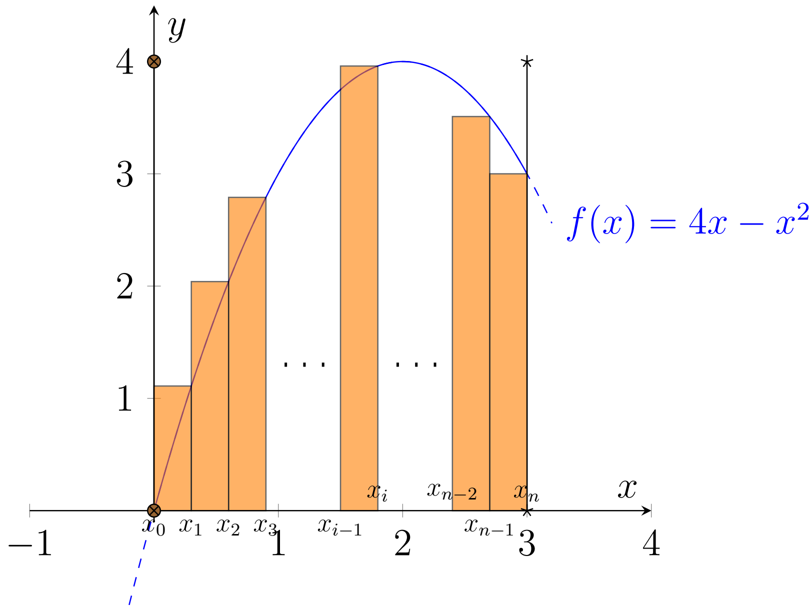
b. La gráfica de la función $f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$ es cóncava hacia arriba en $[5, \infty)$

c. $\int_0^2 (1+2x)\sqrt{x+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u$

Solución

Pregunta 1. (6 ptos.) Calcular la integral $\int_0^3 (4x - x^2)\,\mathrm{d}x$ usando sumas de Riemann

Hacemos una representación gráfica del problema:



Consideremos una partición regular de n subintervalos

- **Longitud de los Subintervalos**

$$\Delta x_i = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

- **Cálculo de los x_i:**

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0 + \frac{3}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_2 = 0 + 2 \cdot \frac{3}{n} = \frac{6}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_{i-1} = (i-1)\frac{3}{n}$$

$$x_i = i\frac{3}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = (n-1)\frac{3}{n}$$

$$x_n = 3$$

- **Subintervalos:**

1er subintervalo: $[x_0, x_1]$
2do subintervalo: $[x_1, x_2]$
3er subintervalo: $[x_2, x_3]$

$$\vdots$$

i-ésimo subintervalo: $[x_{i-1}, x_i]$

$$\vdots$$

n-ésimo subintervalo: $[x_{n-1}, x_n]$

- **Punto Muestra:**

Tomaremos el extremo derecho en cada subintervalo, $x_i^* = x_i$

- **Suma de Riemann**

Tomando en cuenta lo anterior, podemos armar la suma de Riemann tal que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n}\left(4\left(\frac{3i}{n}\right) - \left(\frac{3i}{n}\right)^2\right)\frac{3}{n} \\
&= \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{12i}{n} - \frac{9i^2}{n^2}\right) \\
&= \frac{3}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{12i}{n} - \sum_{i=1}^{n}\frac{9i^2}{n^2}\right) \\
&= \frac{3}{n}\left(\frac{12}{n}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) \\
&= \frac{3}{n}\left(\frac{\cancelto{6}{12}}{\cancel{n}}\frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}} - \frac{\cancelto{3}{9}}{n^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{\cancelto{2}{6}}\right) \\
&= \frac{3}{n}\left(6(n+1) - \frac{3}{2}\frac{(n+1)(2n+1)}{n}\right) \\
&= 18\cdot\frac{n+1}{n} - \frac{9}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}
\end{aligned}$$

$$= 18\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

- Integral de Riemann

Haciendo $\|P\| \to 0 \Rightarrow n \to \infty$, la integral viene dada por:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i &= \lim_{n\to\infty}\left(18\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= 18 - \frac{9}{2}\cdot 2 = 18 - 9 = 9\end{aligned}$$

Finalmente, $\boxed{\int_0^3 (4x - x^2)\,\mathrm{d}x = 9}$

Pregunta 2. (3 ptos.) Hallar el valor promedio de la función $f(x) = 1 + x^2$, en el intervalo $[-1, 2]$. Haga un dibujo que represente el resultado obtenido.

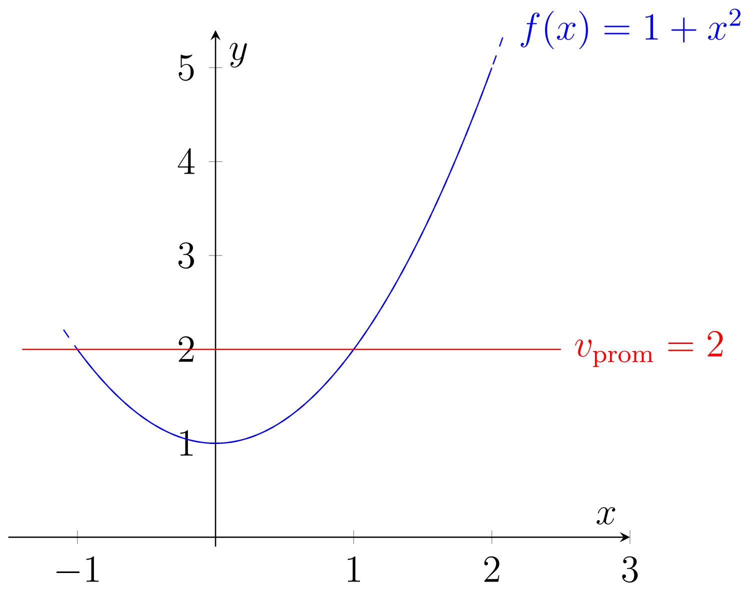
Es sabido que el valor promedio de una función viene dado por:

$$v_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

En particular,

$$\begin{aligned}v_{\text{prom}} &= \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2} (1+x^2)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{2}\\ &= \frac{1}{3}\left(\left(2+\frac{1}{3}2^3\right) - \left(-1+\frac{1}{3}(-1)^3\right)\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\left(2+\frac{8}{3}\right) - \left(-1-\frac{1}{3}\right)\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{14}{3}+\frac{4}{3}\right)\\ &= 2\end{aligned}$$

Gráficamente, se tiene lo siguiente:



Finalmente, $\boxed{v_{\text{prom}} = 2}$

Pregunta 3. (6 ptos.) Hallar $f(2)$ siendo f una función continua que satisface para todo $x \geq 0$ la fórmula

$$\int_0^{x^2(1+x)} f(t)\,\mathrm{d}t = x$$

Si f es continua en $x \geq 0$, entonces es integrable en este intervalo, y la integral del lado derecho de la igualdad es derivable, por el teorema fundamental del cálculo. Derivamos ambos lados de la igualdad:

$$\frac{dy}{dx}\left(\int_0^{x^2(1+x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{dy}{dx}(x)$$

$$f\big(x^2(1+x)\big)\cdot(2x+3x^2) = 1 \qquad \text{(I)}$$

Como buscamos $f(2)$, busquemos el valor de x para el cual $x^2(1+x) = 2$

$$x^2(1+x) = 2$$

$$x^2 + x^3 - 2 = 0 \rightarrow \boxed{\text{Factorización por Ruffini}}$$

$$(x-1)\underbrace{(x^2+2x+2)}_{\text{Polinomio irreducible}} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Reemplazamos $x = 1$ en I y despejamos $f(2)$:

$$\begin{aligned} f(1^2(1+1))(2(1)+3(1)^2) &= 1 \\ f(2)(2+3) &= 1 \\ f(2) &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Finalmente, $\boxed{f(2) = \frac{1}{5}}$

Pregunta 4. (3 ptos. c/u) Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int 3x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{3}{2}\operatorname{sen}(x^2) + C}$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{\sqrt{2}} \frac{x[\![x]\!]}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$

Por definición de la función parte entera, $[\![x]\!] = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1,\ n \in \mathbb{N}$. Como la función no es continua en el intervalo de integración, debemos separarla en varias integrales, así:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{\sqrt{2}} \frac{x[\![x]\!]}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{-1} \frac{x[\![x]\!]}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \frac{x[\![x]\!]}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{x[\![x]\!]}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x[\![x]\!]}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{-1} \frac{x(-2)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \frac{x(-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x + \cancelto{0}{\int_{0}^{1} \frac{x(0)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x} + \int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x(1)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= -2\int_{-2}^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Calculamos la integral indefinida

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+x^2} + C$$

Así,

$$\int_{-2}^{\sqrt{2}} \frac{x[\![x]\!]}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = -2\sqrt{1+x^2}\Big|_{-2}^{-1} - \sqrt{1+x^2}\Big|_{-1}^{0} + \sqrt{1+x^2}\Big|_{1}^{\sqrt{2}} =$$

$$= -2\sqrt{1+(-1)^2} + 2\sqrt{1+(-2)^2} - \sqrt{1+(0)^2} + \sqrt{1+(-1)^2} + \sqrt{1+(\sqrt{2})^2} - \sqrt{1+(1)^2} =$$

$= \boxed{2\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 1}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+4}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^3)^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2}{(x^3)^2+4}\,\mathrm{d}x$

Cambio de variable:

$$u = x^3 \qquad \text{Si } x = 1, u = 1$$
$$du = 3x^2 dx \qquad \text{Si } x = 0, u = 0$$

Nos queda:

$$\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2}{(x^3)^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+4} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{4\left(\frac{u^2}{4}+1\right)} = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{2\left((\frac{u}{2})^2+1\right)}$$

Cambio de variable:

$$t = \frac{u}{2} \qquad \text{Si } u = 1, t = \frac{1}{2}$$
$$dt = \frac{du}{2} \qquad \text{Si } u = 0, t = 0$$

Nos queda:

$$\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{2\left((\frac{u}{2})^2+1\right)} = \frac{1}{6}\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{6}\arctan(t)\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{6}\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan(0)\right) =$$
$$= \boxed{\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Pregunta 5. (2 ptos. c/u) Diga cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. Sean f y g funciones continuas en $[-80, 80]$. Si f es par y g es impar, entonces

$$\int_{-80}^{80} (af(x) + bg(x))\,\mathrm{d}x = 2a\int_0^{80} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-80}^{80} (af(x) + bg(x))\,\mathrm{d}x = a\int_{-80}^{80} f(x)\,dx + b\int_{-80}^{80} g(x)\,dx = 2a\int_0^{80} f(x)\,dx \to \boxed{\textbf{VERDADERO}}$$

b. La gráfica de la función $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$ es cóncava hacia arriba en $[5, \infty)$

Derivamos $f(x)$ dos veces para ver la concavidad:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2}\right) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \frac{-2(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}$$

El único punto de inflexión es $x = -1/2$, ya que el denominador es un polinomio irreducible. Evaluamos el signo de la segunda derivada aplicando el método del cementerio:

	$-\infty$ $-\frac{1}{2}$	∞
-2	$-$	$-$
$1+2x$	$-$	$+$
$1+x+x^2$	$+$	$+$
Signos:	$+$	$-$

De aquí, concluimos que $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty, -1/2)$, pero $[5,\infty) \not\subset (-\infty, -1/2) \to$ $\boxed{\text{La proposición (b) es } \textbf{FALSA}}$

c. $\displaystyle\int_0^2 (1+2x)\sqrt{x+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u$

Apliquemos un cambio de variable:

$u = x + x^2$ Si $x = 2, u = 6$
$du = (1+2x)dx$ Si $x = 0, u = 0$

Nos queda entonces:

$$\int_0^2 (1+2x)\sqrt{x+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^6 \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}\sqrt[3]{u^2}\Big|_0^6 = \frac{2}{3}\sqrt[3]{36}$$

Por otro lado,

$$\int_0^2 \sqrt{u} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{u^2}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4} \neq \frac{2}{3}\sqrt[3]{36}$$

Luego, concluimos que

$$\int_0^2 (1+2x)\sqrt{x+x^2}\,\mathrm{d}x \neq \int_0^2 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u \to \boxed{\text{La proposición (c) es } \textbf{FALSA}}$$

Este parcial fue digitalizado en LaTeX por **Daniel Quijada** para **GECOUSB**

Daniel Quijada
20-10518
Lic. en Matemáticas

gecousb.com.ve

Cualquier error en la resolución de los ejercicios, notificar a **20-10518@usb.ve**